На правах рукописи

Загребина Софья Александровна

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОТОЧЕЧНЫХ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

ЧЕЛЯБИНСК – 2013

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО "Южно-Уральский государственный университет" (национальный исследовательский университет)

Научный консультант доктор физико-математических наук, профессор
Свиридюк Георгий Анатольевич.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Кадченко Сергей Иванович, заведующий кафедрой
Прикладной математики и вычислительной техники
ФГБОУ ВПО "Магнитогорский государственный университет";
доктор физико-математических наук, профессор
Мустафина Светлана Анатольевна, заведующий кафедрой
Математического моделирования Стерлитамакского филиала
ФГБОУ ВПО "Башкирский государственный университет";
доктор физико-математических наук, профессор
Фалалеев Михаил Валентинович, заведующий кафедрой
математического анализа и дифференциальных уравнений
ФГБОУ ВПО "Иркутский государственный университет".

Ведущая организация – ФГБОУ ВПО "Воронежский государственный университет"

Защита состоится 26 декабря 2013 года в 13 ч.00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.298.14 при Южно-Уральском государственном университете, по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета.

Автореферат разослан "____"________ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, доцент А.В. Келлер

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Многие физические, технические и технологические процессы и явления такие, как транспортировка нефти по трубопроводу, плоскопараллельная термоконвекция вязкоупругой несжимаемой жидкости, эволюция свободной поверхности фильтрующейся жидкости, динамика давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде моделируются уравнениями соболевского типа. При этом часто есть необходимость в целях исключения аварийных ситуаций, например, гидродинамического удара при перепадах давления в трубопроводе либо нарушения непрерывности процесса термоконвекции в результате нарушения технологии и т.п., осуществлять многочисленные наблюдения этих процессов с различных точек и в различные моменты времени. Для восстановления параметров этих процессов по результатам наблюдений применяются многоточечные начально-конечные задачи [7]. Решению таких задач для неклассических моделей математической физики посвящено данное исследование.

Необходимо отметить, что уравнения соболевского типа, известные также как вырожденные уравнения, уравнения неразрешенные относительно старшей производной, псевдопараболические уравнения и даже уравнения не типа Коши – Ковалевской составляют ныне обширную область среди неклассических уравнений математической физики. Первым уравнения такого рода получил А. Пуанкаре в конце 19 века, однако систематическое их исследование началось с середины прошлого века в работах С.Л. Соболева.[1] Термин "уравнения соболевского типа" ввел Р.Е. Шоуолтер.

Рассмотрим

– уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u + f, \tag{1}$$

моделирующее динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещиннова-

[1] Demidenko G.V., Uspenskii S.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest – order derivative. N.-Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.

то-пористой среде. Кроме того, уравнение (1) моделирует процесс влагопереноса в почве и процесс теплопроводности в среде с двумя температурами;

– **линейное уравнение Дзекцера**

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u - \beta\Delta^2 u + f, \tag{2}$$

которое описывает эволюцию свободной поверхности жидкости, фильтрующейся в пласте ограниченной мощности;

– систему уравнений Осколкова

$$(\lambda - \nabla^2)u_t = \nu\nabla u - (u \cdot \nabla)u - \nabla p, \ \nabla \cdot u = 0, \tag{3}$$

моделирующую динамику скорости и давления вязкоупругой несжимаемой жидкости.

Если рассмотреть линейный одномерный аналог системы (3) на конечном связном ориентированном графе, то полученная модель описывает транспортировку нефти по трубопроводу. Если же систему (3) рассматривать в замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с краевыми условиями Бенара, то в этом случае она будет моделировать плоскопараллельную термоконвекцию вязкоупругой несжимаемой жидкости.

Рассмотрим *многоточечную начально-конечную задачу*

$$\begin{gathered} P_j(u(\tau_j) - u_j) = 0, \quad u_j \in \mathfrak{U}, \quad j = \overline{0,n}, \\ -\infty \leq a < \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_j < \tau_{j+1} < \ldots < b \leq +\infty, \end{gathered} \tag{4}$$

для уравнений соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{5}$$

Все рассмотрения проводятся в банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, причем операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а P_j – относительно спектральные проекторы. Заметим сразу, что частным случаем (4) в случае, когда $\sigma_j^L(M) = \emptyset$, $j = \overline{1,n}$, является задача Шоуолтера – Сидорова [31]

$$P(u(0) - u_0) = 0, \tag{6}$$

важная роль которой отмечена в ряде численных исследований экономических[2] и технических моделей[3]. Наконец, отметим, что задача (4) в более частной чем здесь постановке

$$P_-u(0) = u_0, \ P_+u(T) = u_T, \tag{7}$$

впервые появилась в работе автора, где она названа "задачей Веригина"[1]. Причиной такого названия послужило большое число публикаций, например, статья Панкова А. А., Панковой Т. Е.[4], где рассмотрена такая задача, но проекторы P_- и P_+ являются спектральными проекторами оператора L. Такая задача была названа "задачей Веригина" , хотя и она, и поставленная здесь задача, имеют мало общего с задачей, поставленной Н.Н. Веригиным. Наконец, обратим внимание на фундаментальную теорию С.Г. Пяткова[5], разработанную для задачи (7), где P_- – спектральный проектор оператора L, построенный по отрицательной части спектра. С.Г. Пятковым такие задачи названы "задачами сопряжения", причем возникли они в уравнениях с меняющимся направлением времени. В челябинской школе Г.А. Свиридюка задача (4) для уравнений соболевского типа (5) в последнее время весьма активно изучается в случае $n = 1$ в различных аспектах. Имеются результаты по оптимальному управлению решениями таких задач[6], в том числе и для уравнений соболевского типа высокого порядка[7]. В заключение следует отметить, что многоточечные начально-конечные задачи имеют прикладное значение, с другой

[2]Келлер А.В. Алгоритм решения задачи Шоуолтера – Сидорова для моделей леонтьевского типа // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. Челябинск, 2011. № 4 (241), вып. 7. С. 40–46.

[3]Шестаков А.Л., Келлер А.В., Назарова Е.И. Численное решение задачи оптимального измерения // Автоматика и телемеханика. 2011. №12. С.56-68.

[4]Панков А.А., Панкова Т.Е. Нелинейные эволюционные уравнения с необратимым операторным коэффициентом при производной. Докл. Акад. наук Украины. 1993. № 9. С. 18–20.

[5]Pyatkov S.G. Operator theory. Nonclassical problems. Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2002.

[6]Манакова Н.А., Дыльков А.Г. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейной модели Хоффа // Мат. заметки. 2013. Т.94, №2. С.225-236.

[7]Замышляева А.А., Цыпленкова О.Н. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска – Лява // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. Челябинск, 2012. №5 (264), вып. 11. С.13-24.

стороны являются малоизученными как качественно, так и численно. Все это обуславливает актуальность данного исследования.

Целью работы является качественное и количественное исследование многоточечных начально-конечных задач для неклассических моделей математической физики с разработкой программ, реализующих численные методы их исследования.

Для достижения данной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Разработать на основе многоточечных начально-конечных условий новый метод моделирования различных процессов, что позволит находить исследуемые параметры физической системы.

2. Построить качественную теорию исследования многоточечных начально-конечных задач для математических моделей, основанных на линейных уравнениях соболевского типа с относительно p-ограниченным, относительно p-секториальным и относительно p-радиальным оператором M.

3. Исследовать математическую модель транспортировки нефти по трубопроводу и доказать однозначную разрешимость многоточечной начально-конечной задачи для этой модели.

4. Исследовать математическую модель плоскопараллельной термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости и доказать однозначную разрешимость многоточечной начально-конечной задачи для этой модели.

5. Исследовать математическую модель эволюции свободной поверхности фильтрующейся жидкости и доказать однозначную разрешимость многоточечной начально-конечной задачи для этой модели.

6. Исследовать стохастическую математическую модель динамики давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде и доказать однозначную разрешимость многоточечной начально-конечной задачи для этой модели.

7. Разработать алгоритмы численных методов решения многоточечных начально-конечных задач для исследуемых моделей.

8. Реализовать в виде программ для ЭВМ разработанные численные мето-

ды и провести вычислительные эксперименты для численного решения многоточечных начально-конечных задач для одномерных уравнений Осколкова на конечном связном ориентированном графе; для линеаризованной системы уравнений Осколкова в области; для линеаризованного уравнения Дзекцера и стохастического уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной.

Научная новизна. Научная новизна исследования заключается в том, что разработанное направление по изучению разрешимости многоточечных начально-конечных задач для линейных уравнений соболевского типа применено к решению ряда актуальных задач гидродинамики, теории неньютоновских жидкостей, теории фильтрации, которые описываются математическими моделями транспортировки нефти по трубопроводу, плоскопараллельной термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости, эволюции свободной поверхности фильтрующейся жидкости, динамики давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде. Доказана однозначная разрешимость многоточечных начально-конечных задач для указанных математических моделей. Разработаны алгоритмы численного решения поставленных задач и реализованы в виде комплекса программ.

Методы исследования. Основным методом исследования является метод редукции конкретных математических моделей к многоточечным начально-конечным задачам для линейных уравнений соболевского типа. При исследовании абстрактных уравнений применяется метод Свиридюка разрешающих (полу)групп операторов. При разработке алгоритмов численных методов используется модифицированный метод Галеркина и метод сеток.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в работе теоретические результаты являются существенным вкладом в развитие общей теории линейных уравнений соболевского типа. Доказана однозначная разрешимость многоточечных начально-конечных задач для абстрактных уравнений соболевского типа, причем получены аналитические решения рассматриваемых задач. На основе абстрактных результатов рассмотрена разрешимость многоточечных начально-конечных задач для конкретных математических эволюционных моделей, моделей гидродинамики и теории фильтрации. Построены алгоритмы решения поставленной задачи для системы уравнений Осколкова, рассмотренной на графе и с условиями Бенара, для уравнения эволюции свободной фильтрующейся жидкости для уравнения Баренблатта - Желтова Кочиной, возмущенного аддитивным белым шумом, позволяющие получать численное решение и наглядное представление о поведении решения в графическом виде. Данное исследование позволит изучать качественно и количественно другие неклассические модели математической физики, в основе которых лежат уравнения соболевского типа. Кроме того, результаты исследования применимы для решения новых задач для таких математических моделей, например, задач управляемости, оптимального управления, устойчивости.

Практическая значимость работы заключается в применении результатов исследования в различных предметных областях. А именно, исследования математической модели транспортировки нефти по трубопроводу могут быть использованы в народном хозяйстве для предотвращения аварийных ситуаций; модель плоскопараллельной термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости будет полезна в нефтяной промышленности; модели эволюции свободной поверхности фильтрующейся жидкости и динамики давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде применимы в геологии при изучении фильтрации воды в почве. Разработаны и реализованы алгоритмы численного решения рассматриваемых задач в виде программ, написанные на языке программмирования высокого уровня C++ и в вычислительной среде Maple, что позволяет в дальнейшем использовать его для решения других неклассических задач математической физики.

Апробация работы. Результаты работы апробированы на международной научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения" (Челябинск, 1999); Четвертом сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике, ИНПРИМ - 2000 (Новосибирск, 2000); международной школе-семинаре по геометрии и анализу (Абрау-Дюрсо; Ростов на Дону, 2000, 2004); III Международной конференции по математическому моделированию (Якутск, 2001); международной научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели" (Челябинск, 2002); международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2002, 2010); международной школе-конференции "Обратные задачи: теория и приложения" (Ханты-Мансийск, 2002); международной конференции "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике" (Новосибирск, 2005); российской конференции, посвященной 50-летию Ин-та математики им. С.Л. Соболева СО РАН "Математика в современном мире" (Новосибирск, 2007); международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений" (Новосибирск, 2008, 2013); международной конференции, посвящщенной памяти В.К. Иванова "Алгоритмический анализ неустойчивых задач" (Екатеринбург, 2001, 2004, 2007, 2011); международной конференции "Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика", посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко (Новосибирск, 2011); международной научно-практической конференции "Измерения: состояние, перспективы развития" (Челябинск, 2012); международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения" (г. Белгород, 2013); International conference "Differential and integral equation"(Odessa, Ukraine, 2000); International conference "Ill-Posed and Inverse Problems" (Novosibirsk, 2002); International conference "Kolmogorov and contemporary mathematics" (Moscow, 2003); International conference "Tikhonov and contemporary mathematics: functional analysis and differential equations" (Moscow, 2006); International conference "Nonlinear partial differential equations"(Alushta, Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NASU, Ukraine, 2003, 2005); Международной летней математической школе памяти В.А. Плотникова (Одесса, Украина, 2013). Результаты неоднократно докладывались на областном семинаре "Уравнения соболевского типа" профессора Г.А. Свиридюка, на семинаре кафедры прикладной математики и вычислительной техники МаГУ профессора С.И. Кадченко.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 68 научных работах, среди них 34 статьи, 12 из которых – статьи в ведущих российских рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК, и 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ. Их список приводится в конце автореферата. Список тезисов докладов включен в диссертацию. В совместных с научным консультантом работах последнему принадлежит постановка задачи. В статьях с другими соавторами в диссертацию вошли только результаты, полученные ее автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем диссертации составляет 228 страниц. Список литературы содержит 232 наименования.

Краткое содержание диссертации

Во введении приводится постановка задачи, ставится цель исследования, описываются методы исследования и обосновывается актуальность, теоретическая и практическая значимость проведенного исследования.

Первая глава посвящена качественному и численному исследованию многоточечной начально-конечной задачи для математической модели транспортировки нефти по трубопроводу, в основе которой лежит одномерный аналог системы уравнений Осколкова, рассмотренное на конечном связном ориентированом графе. Эта глава состоит из восьми параграфов. Они содержат определения, теоремы и вспомогательные утверждения, опираясь на которые получены основные результаты исследования. П 1.1 носит пропедевтический характер, он содержит основные определения и утверждения теории относительно ограниченных операторов, построенной Г.А. Свиридюком[8]. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Введем в

[8]Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.

рассмотрение L-*резольвентное множество*

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$$

и L-*спектр* $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M.

Определение 1 Оператор M называется ***спектрально ограниченным относительно*** оператора L, если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Замечание 1 В дальнейшем будем считать, во-первых, устранимую особую точку полюсом порядка нуль; а во-вторых, выражение "спектрально ограниченным относительно оператора L, причем его L-резольвента имеет в точке ∞ полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$" эквивалентным выражению "оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$".

В п.1.2 и 1.3 приводятся необходимые результаты теории аналитических групп операторов и доказывается обобщенная теорема о расщеплении, которая лежит в основе всех абстрактных результатов. В предположении, что

$$\left.\begin{array}{l} \sigma^L(M) \neq \emptyset, \text{ существует замкнутый контур} \\ \Gamma \subset \mathbb{C}, \text{ ограничивающий область } D \supset \sigma^L(M), \end{array}\right\} \tag{8}$$

построим интегралы *типа Ф. Рисса*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma (\mu L - M)^{-1} L d\mu, Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma L(\mu L - M)^{-1} d\mu. \tag{9}$$

Лемма 1 *Пусть выполняется условие (8) и оператор M (L,p)-ограничен. Тогда операторы $P : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $Q : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ - проекторы.*

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im} P$, $\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im} Q$. Тогда $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$. Через L_k обозначим сужение оператора L на $\mathfrak{U}^k$, а через M_k обозначим сужение оператора M на $\mathrm{dom} M_k = \mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^k$, $k = 0,\ 1$.

Теорема 1 *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда*

(i) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;

(ii) $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$;

(iii) существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ *и* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Пусть теперь L-спектр оператора M удовлетворяет условию

$$\left.\begin{array}{c} \sigma^L(M) = \bigcup\limits_{j=0}^{n} \sigma_j^L(M),\ n \in \mathbb{N},\ \text{причем } \sigma_j^L(M) \neq \emptyset,\ \text{замкнутый} \\ \text{контур } \Gamma_j \subset \mathbb{C},\ \text{ограничивающий область } D_j \supset \sigma_j^L(M),\ \text{такой, что} \\ \overline{D_j} \cap \sigma_0^L(M) = \emptyset \text{ и } \overline{D_k} \cap \overline{D_l} = \emptyset \text{ при всех } j,k,l = \overline{1,n}, k \neq l. \end{array}\right\} \quad (A1)$$

Аналогично (9) построим интегралы

$$\begin{gathered} P_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} R_\mu^L(M) d\mu, \quad Q_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} L_\mu^L(M) d\mu, \\ P_0 = P - \sum_{j=1}^{n} P_j,\ Q_0 = Q - \sum_{j=1}^{n} Q_j,\ j = \overline{1,n}. \end{gathered} \tag{10}$$

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}_j^1 = \mathrm{im} P_j$, $\mathfrak{F}_j^1 = \mathrm{im} Q_j$, $j = \overline{0,n}$, и через L_0 обозначим сужение оператора L на $\mathfrak{U}^0$, через M_0 обозначим сужение оператора M на $\mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^0$. Обозначим через L_{1j} сужение оператора L на $\mathfrak{U}_j^1$, а через M_{1j} обозначим сужение оператора M на $\mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}_j^1$, $j = \overline{0,n}$.

Теорема 2 (Обобщенная теорема о расщеплении). *Пусть выполнены условия (8) и (A1). Тогда*

(i) $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, $L_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}_j^1; \mathfrak{F}_j^1)$, $j = \overline{0,n}$;

(ii) $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, $M_{1j} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}_j^1; \mathfrak{F}_j^1)$, $j = \overline{0,n}$;

(iii) существуют операторы $L_{1j}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}_j^1; \mathfrak{U}_j^1)$, $j = \overline{0,n}$, *и* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

В п. 1.4 получен основной абстрактный результат данной главы – теорема об однозначной разрешимости многоточечной начально-конечной задачи для линейного уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченным оператором M. Возьмем $-\infty \leq a < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < b \leq +\infty$,

$u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0,n}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{F})$ и рассмотрим линейное неоднородое уравнение соболевского типа (5). Вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (5), назовем *решением уравнения* (5). Решение $u = u(t)$, $t \in (a,b)$ уравнения (5), удовлетворяющее условиям (4) назовем *решением многоточечной начально-конечной задачи для уравнения* (5).

Теорема 3 *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, причем выполнено условие (A1). Тогда для любых $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{F}))$, $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0,n}$ существует единственное решение задачи (5), (4), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p}(M_0^{-1}L_0)^q M_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)f^{(q)}(t)+\sum_{j=0}^{n}U_j^{t-\tau_j}u_j+\sum_{j=0}^{n}\int_{\tau_j}^{t}U_j^{t-s}L_{1j}^{-1}Q_j f(s)ds.$$

В п. 1.5 приводятся результаты решения задачи Штурма – Лиувилля на графе, почерпнутые в работе Г.А. Свиридюка, А.С. Шипилова[9], адаптированные к рассматриваемой ситуации. В п.1.6 приводится редукция одномерного аналога системы Осколкова – уравнений вида

$$\lambda u_{jt} - u_{jxxt} = \alpha u_{jxx}, \tag{11}$$

заданных на конечном связном ориентированном графе $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V};\mathfrak{E})$. Здесь $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ – множество дуг. Предполагается,что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и ширину $d_j > 0$. Система Осколкова (3) моделирует динамику скорости и давления вязкоупругой несжимаемой жидкости, прообразом которой являются высокопарафиновые сорта нефти, добываемые, в частности, на месторождениях Западной Сибири. Здесь $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ - параметры, характеризующие вязкие и упругие свойства жидкости. При этом уравнения (11), рассмотренные на графе, моделируют динамику скорости и давления вязкоупругой несжимаемой жидкости в трубопроводе.

На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим задачи с условием непрерывности

$$\begin{gathered} u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \\ E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i) \end{gathered} \tag{12}$$

[9]Свиридюк Г.А., Шипилов А.С. Об устойчивости решений уравнений Осколкова на графе // Дифференц. уравнения. 2010. Т.46, №5. С.737-742.

и условием баланса потоков

$$\sum_{j:E_j\in E^{\alpha}(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{k:E_k\in E^{\omega}(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0. \tag{13}$$

Основным результатом этого параграфа служит

Теорема 4 *При любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0,n}$, многоточечная начально-конечная задача (4), (12), (13) для уравнений (11) имеет единственное решение $u \in C^{\infty}((a,b);\mathfrak{U})$, которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k:\mu_k\in\sigma_j^L(M)} e^{\mu_k(t-\tau^j)}\langle u_j,\varphi_k\rangle\varphi_k.$$

В п.1.7 и 1.8 содержатся описание алгоритма численного метода и комплекса программ, написанного на языке программирования высокого уровня C++, предназначенных для численного решения многоточечной начально-конечной задачи для линейной модели Осколкова транспортировки нефти по трубопроводу, также приводится вычислительный эксперимент.

Пример 1. Найти решение многоточечной начально-конечной задачи

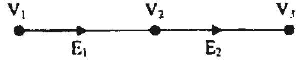
$$P^j(u_j(x,\tau^j) - u^j(x)) = \sum_{k:\mu_k\in\sigma_j^L(M)} \langle u_j(x,\tau^j) - u^j(x),\varphi_k\rangle\varphi_k = 0 \tag{14}$$

для уравнений Осколкова

$$\lambda_j u_{jt} - u_{jxxt} = \alpha_j u_{jxx}, \tag{15}$$

на ориентированном графе $\mathbf{G}$, с двумя соединенными ребрами и тремя вершинами при заданных коэффициентах $\alpha_1 = -0,5$, $\alpha_2 = -0,6$, $\tau_0 = 0$, $\tau^1 = 0,5$, $\tau^2 = 1$, $\lambda_{1,2} = -0,25$, $d_1 = d_2 = 0,2$, $l_{1,2} = \pi$, $N = 3$.

Рассматриваемый граф изображен на рис. 2.



В этом случае уравнения Осколкова представимы в виде

$$
\begin{aligned}
-0,25u_{1t} - u_{1xxt} &= -0,5u_{1xx},\\
-0,25u_{2t} - u_{2xxt} &= -0,6u_{1xx}.
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

Условия непрерывности имеют вид

$$
u_1(\pi, t) = u_2(0, t), \qquad (17)
$$

а условия "баланса потока" -

$$
\begin{gathered}
u_{1x}(0) = 0,\\
0,2u_{1x}(\pi) = 0,2u_{2x}(0),\\
u_{2x}(\pi) = 0.
\end{gathered}
\qquad (18)
$$

Решения $u_j(x,t)$, $j = 1,2$ данной задачи будем искать в виде галеркинских сумм

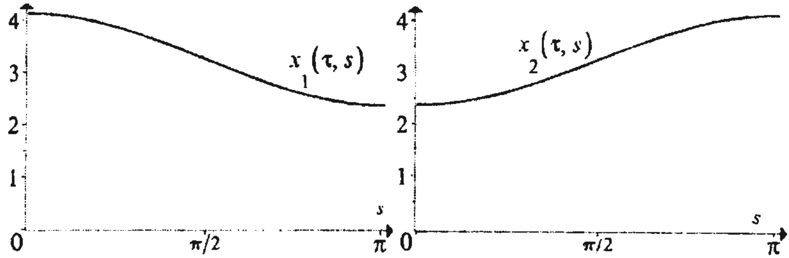
$$
u_1(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{i=1}^{3} a_i(t)\phi_i(x), \quad u_2(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{i=1}^{3} a_i(t)\psi_i(x).
$$

Зададим функции u^0, u^1, u^2: $u_1^0(x) = 1 - \cos(x)$, $u_2^0(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, $u_1^1 = u_2^1 = 0$, $u_1^2(x) = -\cos(x)$, $u_2^2(x) = \cos(x)$, начально-конечные условия (14) зададим в виде

$$
\begin{aligned}
\langle u(x,0) - u^0(x), \varphi_k\rangle &= 0, \quad k = 0,1,2,\\
\langle u(x,\tfrac{1}{2}) - u^1(x), \varphi_k\rangle &= 0, \quad k = 1,2,3,\\
\langle u(x,1) - u^2(x), \varphi_k\rangle &= 0, \quad k = 0,1,3.
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

При указанных значениях параметров получено решение задачи

$$
\begin{aligned}
u_1 = {} & 0{,}28t - 0{,}01 + 0{,}32e^{-0{,}75t+0{,}21} + 4{,}73e^{-0{,}54t} + (0{,}93 - 0{,}09t +\\
& + 0{,}04t^2 - 0{,}08e^{-0{,}75t+0{,}21} + 0{,}08e^{-0{,}54t})\cos(x) + (-0{,}02 + 0{,}02t -\\
& - 0{,}02t^2 - 2{,}05e^{-0{,}75t+0{,}21} - 2{,}05e^{-0{,}54t} + 0{,}01e^{-0{,}75t+0{,}75})\cos(x/2),\\
u_2 = {} & 0{,}28t - 0{,}01 + 0{,}32e^{-0{,}75t+0{,}21} + 4{,}73e^{-0{,}54t} - (0{,}93 - 0{,}09t +\\
& + 0{,}04t^2 - 0{,}08e^{-0{,}75t+0{,}21} + 0{,}08e^{-0{,}54t})\cos(x) - (-0{,}02 + 0{,}02t -\\
& - 0{,}02t^2 - 2{,}05e^{-0{,}75t+0{,}21} - 2{,}05e^{-0{,}54t} + 0{,}01e^{-0{,}75t+0{,}75})\sin(x/2).
\end{aligned}
$$



Вторая глава посвящена качественному и численному исследованию многоточечной начально-конечной задачи для линейной математической модели плоскопаралельной термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости. Эта глава состоит из восьми параграфов. В п. 2.1 – 2.3 приводятся вспомогательные сведения из теории относительно p-секториальных операторах, вырожденных разрешающих полугрупп операторов и построение единиц полугрупп операторов, адаптированные к нашей ситуации. Приведем основные понятия и утверждения этих параграфов.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а оператор $M \in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, тогда можно ввести в рассмотрение *правую* и *левую*

$$R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} R^L_{\mu_k}(M) \quad \text{и} \quad L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{k=1}^{p} L^L_{\mu_k}(M)$$

(L,p)-*резольвенты* оператора M, здесь $\mu_k \in \rho^L(M)$, $k = 0,\dots,p$.

Определение 2 Оператор M называется *p-секториальным относительно* оператора L (короче, *(L,p)-секториальным*), если существуют константы h$K > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\Theta \in (\pi/2,\pi)$ такие, что сектор

$$S^L_{a,\Theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta, \quad \mu \neq a\} \subset \rho^L(M), \tag{20}$$

причем

$$\max\left\{\left\|R^L_{(\mu,p)}(M)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \left\|L^L_{(\mu,p)}(M)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\right\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k - a|} \tag{21}$$

$$\forall \mu_k \in S^L_{a,\Theta}(M), \quad k = 0, \dots, p.$$

В п.2.4 строятся относительно спектральные проекторы, являющиеся в этом случае единицами полугрупп операторов, при условии относительной p-секториальности справа и слева.

Пусть оператор M (L,p)-секториален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, тогда существуют вырожденные аналитические полугруппы операторов

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu \quad \text{и} \quad F^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma L^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu,$$

определенные на пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Введем в рассмотрение ядра $\ker U^{\cdot} = \mathfrak{U}^0$, $\ker F^{\cdot} = \mathfrak{F}^0$ и образы $\mathrm{im} U^{\cdot} = \mathfrak{U}^1$, $\mathrm{im} F^{\cdot} = \mathfrak{F}^1$ этих полугрупп. Нетрудно показать, что $\overline{\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1} = \overline{\mathfrak{U}^0} \oplus \overline{\mathfrak{U}^1} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\overline{\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1} = \overline{\mathfrak{F}^0} \oplus \overline{\mathfrak{F}^1} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$. Сформулируем более сильное утверждение

$$\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U} \quad (\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}), \tag{A2}$$

которое имеет место либо в случае сильной (L,p)-секториальности оператора M справа (слева), $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, либо рефлексивности пространства $\mathfrak{U}$ $(\mathfrak{F})$. Обозначим через L_k сужение оператора L на $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$, а через M_k сужение оператора M на $\mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$. И если оператор M сильно (L,p)-секториален справа и слева, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, то $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$, причем существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$, а также проекторы $P = s - \lim\limits_{t \to 0+} U^t$ и $Q = s - \lim\limits_{t \to 0+} F^t$, расщепляющие согласно (A2) пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно, причем $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im} P$, $\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im} Q$. Введем еще одно условие –

$$\text{существует оператор} \quad L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1), \tag{A3}$$

которое имеет место в случае сильной (L,p)-секториальности оператора M, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. (В.Е. Федоровым было показано, что (A2) вместе с условием (L,p)-секториальности оператора M, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, дает сильную (L,p)-секториальность оператора M справа (слева), $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, а если к ним добавить условие (A3), то получим сильную (L,p)-секториальность оператора M, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$).

П.2.5 посвящен исследованию многоточечной начально-конечной задачи для уравнения соболевского типа с относительно p-секториальным оператором M.

Теорема 5 *Пусть выполняется условие (A1). Тогда существуют проекторы $P_j \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q_j \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, $j = \overline{1,n}$, которые имеют вид*

$$P_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} R^L_\mu(M)d\mu, \ Q_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} L^L_\mu(M)d\mu, \ j = \overline{1,n}. \tag{22}$$

Положим $P_0 = P - \sum\limits_{j=1}^{n} P_j$, $P_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ – проектор. Возьмем $\tau_j \in \mathbb{R}_+$ ($\tau_j < \tau_{j+1}$), $u_{\tau_j} \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0,n}$ и рассмотрим задачу (4) для линейного уравнения соболевского типа (5), где $f : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{F}$. Вектор-функцию $u \in C^1((0,\tau_n);\mathfrak{U}) \cap C([0,\tau_n];\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (5), назовем его *решением*; решение $u = u(t)$ уравнения (5) назовем *решением задачи* (5), (4), если $\lim\limits_{t\to\tau_0+} P_0(u(t) - u_0) = 0$ и $P_j(u(t) - u_j) = 0$, $j = \overline{1,n}$.

Основным результатом данного параграфа является теорема об однозначной разрешимости задачи (5), (4),

Теорема 6 *Пусть оператор M (L,p)-секториален, причем выполнены (A1) - (A3). Тогда для любой вектор-функции $f^0 \in C^p([0,\tau_n];\mathfrak{F}^0) \cap C^{p+1}((0,\tau_n);\mathfrak{F}^0)$, $f^1 \in C([0,\tau_n];\mathfrak{F}^1)$ существует единственное решение задачи (5), (4) которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -\sum_{q=1}^{p}(M_0^{-1}L_0)^q M_0^{-1} f^{0(q)}(t) + \sum_{j=0}^{n} U_j^{t-\tau_j} u_j + \sum_{j=0}^{n}\int_{\tau_j}^{t} U_j^{t-s} L_{1j}^{-1} Q_j f(s)ds.$$

Полученные абстрактные результаты применяются в п.2.6 для линейной модели плоскопараллельной термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости, рассмотренной в области $\Omega = (0,a) \times (0,b) \in \mathbb{R}^2$

$$(\lambda - \Delta)\Delta\psi_t = -\nu\Delta^2\psi - \alpha\theta_x + \xi, \quad \theta_t = \delta\Delta\theta - \beta\psi_x + \zeta, \tag{23}$$

с краевыми условиями Бенара

$$\psi(x,0,t) = \Delta\psi(x,0,t) = \psi(x,b,t) = \Delta\psi(x,b,t) = 0, \tag{24}$$

$$\theta(x,0,t) = \theta(x,b,t) = 0, \tag{25}$$

$$\text{функции } \psi \text{ и } \theta \text{ периодичны по } x \text{ с периодом } a. \tag{26}$$

Здесь проводится редукция поставленной задачи к абстрактному уравнению (5). Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$, где $\mathfrak{V} = \{v \in W_2^4(\Omega) : v$ удовлетворяет (24), (26)$\}$, $\mathfrak{W} = L_2(\Omega)$, а $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} = L_2(\Omega)$; операторы L и M зададим формулами

$$L = \begin{pmatrix} (\lambda - \Delta)\Delta & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \nu\Delta^2 & \alpha\dfrac{\partial}{\partial x} \\ \beta\dfrac{\partial}{\partial x} & \delta\Delta \end{pmatrix}$$

соответственно. Очевидно, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $\operatorname{dom} M = \mathfrak{V} \times \{w \in W_2^2(\Omega) : w$ удовлетворяет (24), (25)$\}$.

Доказывается $(L,0)$-секториальность оператора M. Основным результатом этого параграфа является теорема об однозначной разрешимости многоточечной начально-конечной задачи (4).

Теорема 7 *При любых $\alpha, \beta, \lambda, \nu \in \mathbb{R}$; $\delta, \tau_j \in \mathbb{R}_+$, $u_j \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0,n}$, ; $\xi, \zeta \in C^1([0,\tau_n]; L_2(\Omega))$ существует единственное решение $u = u(t)$ задачи (4) для уравнений (23) с краевыми условиями (24) - (26).*

П.2.7 посвящен нахождению собственных значений и собственных функций для задачи Бенара для системы уравнений Осколкова, которые будут использованы для вычислительных экспериментов с линейной моделью плоскопараллельной термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости. В п. 2.8 содержатся описание алгоритма численного метода и комплекса программ, написанного в вычислительной среде Maple, предназначенных для численного решения изучаемой модели, также приводится вычислительный эксперимент.

Пример 2. В области $\Omega = [0,\pi] \times [0,\pi]$ рассматриваем систему уравнений (23) с условиями (24) - (26) при заданных коэффициентах $\nu = 2$, $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\lambda = 1$.

Множество собственных функций ортонормированное в смысле L_2 следующее: $\alpha_{kl} = \frac{2}{\pi}\sin(2kx)\sin(ly)$, $\beta_{kl} = \frac{2}{\pi}\cos(2kx)\sin(ly)$, $\gamma_l = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin(ly)$. Галеркинское приближение к решению поставленной задачи возьмем в виде $\psi = a(t)\alpha_{11}$, $\theta = b(t)\beta_{11} + c(t)\gamma_2$. Зададим многоточечные начально-конечные условия при $j = 0$ из окрестности точки нуль, $a(0) = 0.2$, $b(0) = 0.1$, $c(0) = 0.2$. Решим поставленную задачу для данной системы уравнений. Результаты численного решения частично приведены в таблице 1.

Табл.1: Численное решение системы с начально-конечными условиями $a(0) = 0.2$, $b(0) = 0.1$, $c(0) = 0.2$

t	$a(t)$	$b(t)$	$c(t)$
0.1	0.1854240039	0.0886898129	0.1354017426
0.3	0.1525995343	0.0730387274	0.0624894731
0.4	0.1357883884	0.0663610716	0.0426287976
0.6	0.1035998576	0.0535727678	0.0200176562
0.8	0.0749935012	0.0414719893	0.0095013049
1.0	0.0509756644	0.0305398288	0.0045377105
1.2	0.0317854606	0.0211874342	0.0021642916
1.4	0.0171784838	0.0135878727	0.0010216194
1.6	0.0066299269	0.0077117905	0.0004733233

Третья глава посвящена математической модели эволюции свободной поверхности фильтрующейся жидкости. В п. 3.1 – 3.4 приводятся результаты теории сильно (L,p)-радиальных операторов и адаптированные к нашей ситуации. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Определение 3 Оператор M называется *сильно (L,p)-радиальным*, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ (a,+\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0\ \forall \mu \in (a,+\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{||(R^L_\mu(M))^{n(p+1)}||_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, ||(L^L_\mu(M))^{n(p+1)}||_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\} \le K(\mu - a)^{-n(p+1)};$$

(iii) существует плотный в $\mathfrak{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$, такой, что

$$||M(\mu L - M)^{-1}(L^L_\mu(M))^{p+1}f||_{\mathfrak{F}} \le (\mu - a)^{-p-2}\cdot \mathrm{const}(f),\ \forall f \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}},\ \forall \mu \in (a,+\infty);$$

(iv) $\|(L^L_\mu(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})} \le K(\mu - a)^{-p-2}$, $\forall \mu \in (a, +\infty)$.

В условиях сильной (L,p)-радиальности оператора M построим в п.3.5. единицу разрешающей полугруппы однородного уравнения соболевского типа, которая является проектором, расщепляющим пространство $\mathfrak{U}$

$$P = U^0 = s\text{-}\lim_{t\to 0+} U^t, \quad U^t = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{t}R^L_{\frac{k}{t}}(M)\right)^k, \quad k > p.$$

Аналогично можно построить проектор для пространства $\mathfrak{F}$

$$Q = F^0 = s\text{-}\lim_{t\to 0+} F^t, \quad F^t = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{t}L^L_{\frac{k}{t}}(M)\right)^k, \quad k > p.$$

Кроме того, ядра $\ker U^\cdot = \mathfrak{U}^0$, $\ker F^\cdot = \mathfrak{F}^0$ и образы $\mathrm{im} U^\cdot = \mathfrak{U}^1$, $\mathrm{im} F^\cdot = \mathfrak{F}^1$ этих полугрупп имеют вид.

Дополнительно к условию (A1) введем еще два условия.

$$\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U} \quad (\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}). \tag{B1}$$

Обозначим через L_k сужение оператора L на $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$, а через M_k – сужение оператора M на $\mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$. И если оператор M сильно (L,p)-радиален, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, то $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $M_k \in Cl(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$, причем существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$. В случае сильной (L,p)-радиальности оператора M, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ выполняется еще одно условие –

$$\text{существует оператор} \quad L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1). \tag{B2}$$

Если оператор M сильно (L,p)-радиален справа, и выполняются условия (A1), (B1), (B2), то $P_j = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_j} R^L_\mu(M)d\mu$, $j = \overline{1,n}$, - проекторы. Положим $P_0 = P - \sum\limits_{j=1}^{n} P_j$. $P_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ – проектор. Возьмем $\tau_j \in \mathbb{R}_+$ $(\tau_j < \tau_{j+1})$, $u_{\tau_j} \in \mathfrak{U}$, $j = \overline{0,n}$ и рассмотрим задачу (4) для линейного уравнения соболевского типа (5), где $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+;\mathfrak{F})$. Вектор-функцию $u \in C^1((0,\tau_n);\mathfrak{U}) \cap C([0,\tau_n];\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (5), назовем его ***решением***; решение $u = u(t)$

уравнения (5) назовем *решением задачи* (5), (4), если $\lim_{t\to\tau_0} P_0(u(t)-u_0)=0$ и $P_j(u(t)-u_j)=0$, $j=\overline{0,n}$.

В случае их выполнения справедлива теорема об однозначной разрешимости многоточечной начально-конечной задачи

Теорема 8 *Пусть оператор M (L,p)-радиален, причем выполнены (B1) -(B3). Тогда для любой вектор-функции $f^0\in C^p([0,\tau_n];\mathfrak{F}^0)\cap C^{p+1}((0,\tau_n);\mathfrak{F}^0)$, $f^1\in C([0,\tau_n];\mathfrak{F}^1)$ существует единственное решение задачи (5), (4) которое к тому же имеет вид*

$$u(t)=-\sum_{q=1}^{p}(M_0^{-1}L_0)^qM_0^{-1}f^{0(q)}+\sum_{j=0}^{n}U_j^{t-\tau_j}u_j+\sum_{j=0}^{n}\int_{\tau_j}^{t}U_j^{t-s}L_{1j}^{-1}Q_jf(s)ds.$$

В п.3.6 полученные абстрактные результаты применяются для решения многоточеной начально-конечной задачи для линейной модели эволюции свободной поверхности фильтрующейся жидкости. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Рассмотрим уравнение

$$(\lambda-\Delta)u_t=\alpha\Delta u-\beta\Delta^2u+f, \tag{27}$$

где $\lambda\in\mathbb{R}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$, с краевыми условиями

$$u(x,t)=\Delta u(x,t)=0,\ (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}_+. \tag{28}$$

В соответствующих функциональных пространствах $\mathfrak{U}=\{u\in W_p^k(\Omega)$: выполняется условие (28)$\}$ и $\mathfrak{F}=W_p^k(\Omega)$, где $k\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, $p\in(1,+\infty)$, $W_q^l(\Omega)$ – пространства Соболева. определим операторы $L=\lambda-\Delta$, $L\in\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $M=\alpha\Delta-\beta\Delta^2$, $M\in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ где $\operatorname{dom}M=\{u\in W_p^{k+2}(\Omega)$: выполняется условие (28)$\}$

Лемма 2 *При любых $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0,\alpha\cdot\beta^{-1}\}$ оператор M сильно $(L,0)$-радиален.*

В силу теоремы 8 имеет место

Теорема 9 *При любых* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, \alpha \cdot \beta^{-1}\}$, $\beta \in \mathbb{R}_+$, $u_0 \in \mathrm{dom} M$, $u_\tau \in \mathfrak{U}$, $f \in \mathfrak{F}$ *существует единственное решение* $u \in C^1([0,\tau];\mathfrak{U})$ *задачи (4), (28) для уравнения (27), которое имеет вид*

$$u(t) = -\sum_{\lambda_k = \lambda} \frac{\langle f, \varphi_k\rangle \varphi_k}{\alpha\lambda_k - \beta\lambda_k^2} + \sum_{k:\mu_k \in \sigma_j^L(M)} \exp\left(\frac{\alpha\lambda_k - \beta\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k}(t - \tau_j)\right) \langle u_j, \varphi_k\rangle \varphi_k +$$

$$+ \sum_{k:\mu_k \in \sigma_j^L(M)} \left[1 - \exp\left(\frac{\alpha\lambda_k - \beta\lambda_k^2}{\lambda - \lambda_k}(t - \tau_j)\right)\right] \frac{\langle f, \varphi_k\rangle \varphi_k}{\alpha\lambda_k - \beta\lambda_k^2}.$$

В п.3.7 и 3.8 содержатся описание алгоритма численного метода и комплекса програм, написанного на языке программирования высокого уровня C++, предназначенных для численного решения многоточечной начально-конечной задачи для линейной модели эволюции свободной поверхности фильтрующейся жидкости, также приводится вычислительный эксперимент.

Пример 3. Найти решение задачи на отрезке длины π, $N = 3$

$$(-u_t - u_{xxt}) = u_{xx} - 2(u_{xx})_x x. \tag{29}$$

Компоненты вектор-функции решения $u(t,x)$ данной задачи будем искать соответственно в виде галеркинских сумм $u(t,s) = \sum\limits_{i=1}^{3} a_i(t)\varphi_i(x)$, где $\varphi_i(x)$ - собственные функции задачи Штурма - Лиувилля на отрезке. Тогда решение начально-конечной задачи $a_1(0) = 5,142$, $a_2(0) = -0,904$, $a_3(1) = 0$ представимо в виде

$$u(t,x) = 4{,}265 - 0{,}202t + 0{,}426t^2 + 0{,}191t^3 + 0{,}877e^t + (0{,}060t -$$
$$-0{,}020t^2 + 0{,}010t^3 - 0{,}275)\cos(x) + (0{,}994 - 0{,}363t + 0{,}006t^2 -$$
$$-0{,}385t^3 + 0{,}252e^{2{,}082t - 2{,}082})\cos(x/2),$$

Четвертая глава посвящена изучению многоточечной начально-конечной задачи для линейной модели Баренблатта - Желтова - Кочиной с аддитивным белым шумом. В п. 4.1 вводятся основные понятия, определения и утверждения, необходимые для изучения K-винеровских процессов.

Пусть $\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ - полное вероятностное пространство, $\mathfrak{U} \equiv (\mathfrak{U}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ - вещественное сепарабельное гильбертово пространство, снабженное борелевской σ-алгеброй. Последовательность $\{\beta_k(t)\}$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ независимых одномерных (стандартных) винеровских процессов $\beta_k(t) \equiv \beta_k(t,\omega)$, $\beta_k : \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$, которые еще называют *броуновскими движениями*, а λ_k - собственные значения ядерного оператора.

Определение 4 Случайный процесс

$$W(t) \equiv W(t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\beta_k(t)\varphi_k,\ t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{30}$$

называется *($\mathfrak{U}$-значным, ядерным) K-винеровским процессом.*

K-винеровский процесс обладает следующими свойствами.

(W1) $W(0) = 0$ п.в. на Ω, и траектории п.н. непрерывны на $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(W2) Траектории K-винеровского процесса п.н. недифференцируемы ни в одной точке $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и на любом промежутке $\mathfrak{I} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ имеют неограниченную вариацию.

(W3) K-Винеровский процесс – гауссов.

В п. 4.2 рассматривается многоточечная начально-конечная задача для уравнения соболевского типа с аддитивным белым шумом. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ - вещественные сепарабельные гильбертовы пространства, оператор $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ - ядерный, а операторы L, M, $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Рассмотрим линейное стохастическое уравнение

$$Ld\eta = M\eta dt + N\delta W, \tag{31}$$

где в правой части через δW обозначен обобщенный дифференциал ($\mathfrak{U}$-значного) K-винеровского процесса. Цель данного параграфа – постановка и исследование многоточечной начально-конечной задачи для уравнения (31). Согласно пункту 1.2 диссертации потребуем выполнение условия (A1), благодаря которому построим проекторы в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно P_j, Q_j,

$j = \overline{0,n}$ по формуле (10). Далее, на полуинтервале $\overline{\mathbb{R}_+}$ выберем точки τ_j, $j = \overline{1,n}$, такие, что $0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n$ и ($\mathfrak{U}$-значные) независимые случайные величины $\xi_j \in \mathbf{L_2}$, $j = \overline{1,n}$. Аналогично пункту 1.4 поставим многоточечную начально-конечную задачу – найти случайный процесс $\eta \in \mathbf{CL_2}$, удовлетворяющий уравнению (31) и условиям

$$P_j(\eta(\tau_j) - \xi_j) = 0, \quad j = \overline{0,n}. \tag{32}$$

Если выполнено условие

$$QN = N, \tag{33}$$

то в силу теоремы 3 построим единственное "формальное" решение $\eta = \eta(t)$ задачи (31), (32)

$$\eta(t) = \sum_{j=0}^{n} U_j^{t-\tau_j} P_j \xi_j + \sum_{j=0}^{n} \int_{\tau_j}^{t} U_j^{t-s} L_{1j}^{-1} Q_j \delta W(s) ds, \ t \in \overline{\mathbb{R}_+}. \tag{34}$$

Теорема 10 *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и выполнены условия (A1), (33). Пусть случайные величины $\xi_j \in \mathbf{L_2}$, $j = \overline{0,n}$, независимы. Тогда случайный процесс η принадлежит $\mathbf{CL_2}(\overline{\mathbb{R}_+})$ и определен формулой*

$$\eta(t) = \sum_{j=0}^{n} \left(U_j^{t-\tau_j} P_j \xi_j + L_{1j}^{-1} Q_j (W(t) - W(\tau_j)) \right) + \sum_{j=0}^{n} \int_{\tau_j}^{t} U_j^{t-s} S_j L_{1j}^{-1} Q_j W(s) ds, \tag{35}$$

Определение 5 Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и выполнены условия (A1) и (33). Пусть случайные величины $\xi_j \in \mathbf{L_2}$ (или их проекции $P_j\xi_j \in \mathbf{L_2}$), $j = \overline{0,n}$. Тогда при любом ($\mathfrak{U}$-значном) K-винеровском процессе $W \in \mathbf{CL_2}$ случайный процесс η, определенный формулой (35) называется *решением задачи (31), (32)*.

В п. 4.3 проводится построение ядерного оператора Λ_d^{-1} и нахождения его собственных значений, которые понадобятся для вычислительного эксперимента. В п 4.4 рассматривается стохастическая модель Баренблатта – Желтова – Кочиной. Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с границей ∂G класса C^∞. Будем искать случайный процесс $u = u(x,t)$, удовлетворяющий в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ стохастическому уравнению

$$(\lambda - \Delta)du = \alpha\Delta u dt + NdW \tag{36}$$

и условиям Дирихле

$$u(x,t) = 0, \ (x,t) \in \partial G \times \mathbb{R}_+. \tag{37}$$

Здесь параметр $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Уравнение моделирует динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде со случайным внешним воздействием.

Приводится редукция (36), (37) к уравнению соболевского типа (31) с аддитивным белым шумом, под которым понимается производная K-винеровского процесса. Далее, на основании абстрактного результата об однозначной разрешимости многоточечной начально-конечной задачи (31), (32) доказывается

Теорема 11 *При любых $-\lambda \in \{\mu_k\}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\xi \in \mathbf{L_2}$ такой, что выполнено (A1), существует единственное решение $u \in \mathbf{CL_2}$ задачи (32) для стохастического уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной с аддитивным белым шумом и условием (37).*

В п.4.5 и 4.6 содержатся описание алгоритма численного метода и комплекса программ, написанного в вычислительной среде Maple, предназначенных для численного решения многоточечной начально-конечной задачи для линейной модели Баренблатта – Желтова – Кочиной с аддитивным белым шумом, также приводится вычислительный эксперимент.

В заключении представлены выводы по результатам исследований и обосновывается соответствие работы паспорту специальности 05.13.18.

В приложении представлены свидетельства о регистрации программ "Численное исследование динамики вязкоупругой жидкости в трубопроводе", и "Численное решение многоточечной начально-конечной задачи для уравнения Навье – Стокса".

Результаты, выносимые на защиту:

1. Разработан на основе многоточечных начально-конечных условий новый метод моделирования различных процессов, позволяющий находить изучаемые параметры физической системы.

2. Построена качественная теория исследования многоточечных начально-конечных задач для математических моделей, основанных на линейных уравнениях соболевского типа с относительно p-ограниченным, относительно p-секториальным и относительно p-радиальным оператором M.

3. Исследована математическая модель транспортировка нефти по трубопроводу и доказана однозначная разрешимость многоточечной начально-конечной задачи для этой модели.

4. Исследована математическая модель плоскопараллельной термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости и доказана однозначная разрешимость многоточечной начально-конечной задачи для этой модели.

5. Исследована математическая модель эволюции свободной поверхности фильтрующейся жидкости и доказана однозначная разрешимость многоточечной начально-конечной задачи для этой модели.

6. Исследована стохастическая математическая модель динамики давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде и доказана однозначная разрешимость многоточечной начально-конечной задачи для этой модели.

7. Разработаны алгоритмы численных методов решения многоточечных начально-конечных задач для исследуемых моделей.

8. Реализованы разработанные численные методы в виде программ для ЭВМ и проведены вычислительные эксперименты для численного решения многоточечных начально-конечных задач для одномерных уравнений Осколкова на конечном связном ориентированном графе; для линеаризованной системы уравнений Осколкова, рассмотренной в области; для линеаризованного уравнения Дзекцера и стохастического уравнения Баренблатта - Желтова - Кочиной.

Полученные результаты соответствуют следующим областям исследования специальности:

1) разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений (п.1);

2) развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (п.2);

3) реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов (п.4).

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в ведущих российских рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК

1. Свиридюк, Г.А. Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно p-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Дифференц. уравнения. - 2002. - Т.38, №12. - С.1646-1652.

2. Свиридюк, Г. А. О задаче Веригина для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. - 2003. - №7. - С.54-58.

3. Загребина, С.А. О задаче Шоуолтера - Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. - 2007. - №3. - С.22-28.

4. Свиридюк, Г.А. Устойчивость уравнений Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина, П.О. Пивоварова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: "Физ.-мат. науки". - Самара, 2010. - №1 (20). - С.6-15.

5. Загребина, С.А. Устойчивость линейных уравнений Хоффа на графе / С.А. Загребина, П.О. Пивоварова // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. - Челябинск, 2010. - №16 (192), вып. 5. - С.11-16.

6. Загребина, С.А. Начально-конечная задача для линейной системы Навье - Стокса / С.А. Загребина // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат.

моделирование и программирование. - Челябинск, 2011. - №4 (221), вып. 7. - С.35-39.

7. Загребина, С.А. Многоточечная начально-конечная задача для линейной модели Хоффа / С.А. Загребина // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. - Челябинск, 2012. – №5 (264), вып. 11. – С.4-12.

8. Загребина, С.А. Начально-конечная задача для уравнений соболевского типа с сильно (L,p)-радиальным оператором / С.А. Загребина // Мат. заметки ЯГУ. – Якутск, 2012. – Т.19, вып.2. - С.39-48.

9. Свиридюк, Г.А. Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2012. - №40 (299), вып. 14. - С.7-18.

10. Загребина, С.А. Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченными операторами и аддитивным белым шумом / С.А. Загребина, Е.А. Солдатова // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. "Математика". - 2013. - Т.6, №1. С.20-34.

11. Загребина, С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. - Челябинск, 2013. – Т.6, №2 – С.5-24.

12. Загребина, С.А. Многоточечная начально-конечная задача для стохастической модели Баренблатта - Желтова - Кочиной / С.А. Загребина // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника". - Челябинск, 2013. - Т.13, №4. - С.103-111.

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

13. Численное исследование динамики вязкоупругой жидкости в трубопроводе: свидетельство № 2013618938 / Загребина С.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)».

– 2013616859; заявл. 31.07.2013; зарегистр. 23.09.2013, реестр программ для ЭВМ.

14. Численное решение многоточечной начально-конечной задачи для уравнения Навье – Стокса: свидетельство № 2013618937 / Загребина С.А. (RU); правообладатель ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)». – 2013616858; заявл. 31.07.2013; зарегистр. 23.09.2013, реестр программ для ЭВМ.

Другие научные публикации

15. Загребина С.А. Исследование системы уравнений Осколкова / С.А. Загребина // Рук. деп. ВИНИТИ, 1998, № 2442-В98 от 28.07.98.

16. Загребина С.А. Задача Веригина для одного класса линейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина // Рук. деп. ВИНИТИ, 2000, № 3248-В00 ДЕП. 22.12.2000.

17. Загребина С.А. О задаче Веригина – Дирихле для уравнений соболевского типа / С.А. Загребина // Уравнения соболевского типа: сб. работ под ред. В.Е.Федорова. – Челябинск, 2002. – С.196-199.

18. Загребина С.А. О задаче Дирихле – Веригина для линейного уравнения Осколкова / С.А. Загребина // Вестн. Челяб. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. – 2003. – №1 (7). – С.57-65.

19. Zagrebina S.A. The Verigin – Dirichlet problem for the linear Oskolkov equation / S.A. Zagrebina // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер.: Ест. и техн. науки. – Тамбов, 2003. – Т.8, вып.3. – С. 385.

20. Загребина С.А. О существовании и устойчивости решений уравнений Навье – Стокса / С.А. Загребина // Вестн. МаГУ. Сер. Математика. – Магнитогорск, 2005. – Вып. 8. – С.74-86.

21. Загребина С.А. Об одном обобщении задачи Шоуолтера – Сидорова / С.А. Загребина // Оптимизация, управление, интеллект: тр. Рос. ассоциации мат. программирования, Междунар. акад. нелинейных наук, Рос. ассоциации искусств. интеллекта. – Иркутск, 2005. – №2(10). – С.169-175.

22. Загребина С.А. Обобщенная задача Шоуолтера – Сидорова для уравнений соболевского типа с сильно (L, p)-радиальным оператором / С.А. Загребина, М.А. Сагадеева // Вестн. МаГУ. Сер. Математика. – Магнитогорск, 2006. – Вып. 9. – С.17-27.

23. Загребина С.А. Задача Шоуолтера – Сидорова для уравнения соболевского типа на графе / С.А. Загребина // Оптимизация, управление, интеллект: тр. Рос. ассоциации мат. программирования, Междунар. акад. нелинейных наук, Рос. ассоциации искусств. интеллекта. – Иркутск, 2006. – №1(12). – С.42-49.

24. Загребина С.А. Задача Шоуолтера – Сидорова – Веригина для линейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина // Неклассические уравнения математической физики: тр. междунар. конф. "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения посвящ. 100-летию со дня рождения акад. И.Н. Векуа / отв. ред. А.И. Кожанов; Рос. Акад. наук, Сиб. отд., ин-т математики им. С.Л. Соболева. – Новосибирск, 2007. – С.150-157.

25. Загребина С.А. Начально-конечная задача для эволюционных уравнений соболевского типа на графе / С.А. Загребина, Н.П. Соловьева // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2008. – №15 (115), вып. 1. – С. 23-26.

26. Загребина С.А. Существование и устойчивость решений одного класса полулинейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина, М.М. Якупов // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. – Челябинск, 2008. – №27 (127), вып. 2. – С. 10-18.

27. Загребина С.А. Начально-конечная задача для линейных эволюционных уравнений соболевского типа на графе / С.А. Загребина, Н.П. Соловьева // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2009. – Т.16, вып. 2. – С.329-330.

28. Загребина С.А. Устойчивость решений уравнения Хоффа / С.А. Загребина, П.О. Пивоварова // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2009. – Т.16, вып. 2. – С.330-331.

29. Загребина С.А. Существование и устойчивость задачи Бенара для уравнения термоконвекции / С.А. Загребина // Обозрение приклад. и пром. математики.

Ю2

матики. – М., 2009. – Т.16, вып. 4. – С.651-652.

30. Загребина С.А. Начально-конечные задачи для уравнений соболевского типа как обобщения задачи Шоуолтера – Сидорова / С.А. Загребина // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2010. – Т.17, вып. 4. – С.552-553.

31. Свиридюк Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. "Математика". – 2010. – Т.3, №1. – С.104-125.

32. Загребина С.А. Устойчивость и неустойчивость решений уравнений Хоффа. Численный эксперимент / С.А.Загребина, П.О. Пивоварова // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ / под ред. А.И. Кожанова. – Новосибирск, 2010. – С.88-94.

33. Загребина С.А. Измерение динамики выпучивания двутавровой балки в конструкции / С.А. Загребина, А.В. Белов // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ / под ред. А.И. Кожанова. – Новосибирск, 2012. – С.99-104.

34. Загребина С.А. Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной с белым шумом / С.А. Загребина, Е.А. Солдатова // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2012. – Т.19, вып. 2. – С.252-254.

35. Загребина С.А. Обобщенная теорема о расщеплении / С.А. Загребина // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2012. – Т.19, вып. 4. – С.563-564.

36. Загребина С.А. Об одной новой задаче для уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной / С.А. Загребина, А.С. Конкина // Вестн. МаГУ. Сер. Математика. – Магнитогорск, 2012. – Вып. 14. – С. 67-77.

Типография «Два комсомольца»

Подписано в печать 5.08.13. Формат 60 × 84 1/16.

Печать трафаретная. Усл. печ. л. 1,87. Уч.-изд. л. 2.

Тираж 150 экз. Заказ 142/456

Отпечатано в типографии «Два комсомольца».

454008, г. Челябинск, Комсосольский пр., 2